Correction des exercices sur les suites géométriques

I

Soit $(u(n))$ une suite géométrique telle que
$u(0) = 7$ et sa raison est égale à $q = 3$.

1. - $u(1) = qu(0) = 3 \times 7 = \boxed{21}$
   - $u(2) = qu(1) = 3 \times 21 = \boxed{63}$

     $u(3) = qu(2) = 3 \times 63 = \boxed{189}$
2. Le terme général est $u(n) = u(0) \times q^n = 7 \times 3^n$ donc $u(9) = 7 \times 3^9 = \boxed{15\,309}$

II

Calculer le 10e terme et le 35e terme de la suite géométrique de premier terme u(1) = 0,9 et de raison $q = 2$. La suite géométrique a pour raison q.

- $u(10) = u(1) \times q^9 = 0{,}9 \times 2^9 = \boxed{460{,}8}$
- $u(35) = 0{,}9 \times 2^{34} = 0{,}9 \times 17\,179\,869\,184 = \boxed{15\,461\,882\,265{,}6}$

III

Calculer la raison positive d'une suite géométrique dont on connait les termes suivant :
$u(3) = 3$ et $u(5) = 12$.
$u(5) = u(3) \times q^2$ donc $q^2 = \dfrac{u(5)}{u(3)} = \dfrac{12}{3} = 4$ d'où $\boxed{q = 2}$ car $q > 0$

IV

La population actuelle augmente de 1 % par an. En 2010, elle était de 6,9 milliards. On note $u(n)$ la population mondiale l'année $2010 + n$.

1. Pour tout n, $u(n+1) = (1 + 1\,\%)\, u(n) = 1{,}01 u(n)$ donc la suite $(u(n))$ est géométrique, de raison $q = 1{,}01$ et de prempier terme $u(0) = 6{,}9$.
2. Pour tout n, $u(n) = u(0) \times q^n = \boxed{6{,}9 \times 1{,}01^n}$
3. 2025 correspond à $n = 15$; $u(15) \approx 8{,}01$; en 2025, la population sera de 8,01 milliards environ.
4. - $u(26) \approx 8{,}93$
   - $u(27) \approx 9{,}03 > 9$

   La population dépassera 9 milliards d'habitants en 2037

V

Pour répondre à une nouvelle norme antipollution, un important groupe industriel de l'agroalimentaire doit ramener progressivement sa quantité de rejets, qui est de 50 000 tonnes par an en 2012, à une valeur inférieure ou égale à 30 000 tonnes en 10 ans au plus, soit une réduction de 40 %.
Il s'engage à réduire chaque année sa quantité de rejets de 4 %.

1. $\dfrac{48000 - 50000}{50000} = -0{,}04 = -4\,\%$. Il respecte son engagement.
2. Pour tout entier naturel n, on note $r(n)$ la quantité de rejets de l'année « $2012 + n$ ».

   (a) $r(n+1) = (1 - 4\,\%)\, r(n) = \boxed{0{,}96 r(n)}$.

   La suite de terme général $r(n)$ est géométrique, de raison $\boxed{q = 0{,}96}$ et de premier terme $\boxed{r(0) = 50\,000}$

   (b) $r(n) = r(0) q^n = \boxed{50\,000 \times 0{,}96^n}$
3. 2022 correspond à $n = 10$.

   $r(10) = 50\,000 \times 0{,}96^{10} \approx 33241{,}6 > 30\,000$.
   La norme ne sera donc pas respectée en 2022.
4. Avec un taux de réduction de 5 %, on a $q = 0{,}95$.
   Alors $r(10) \approx 29\,937 < 30\,000$.
   La norme serait respectée.