

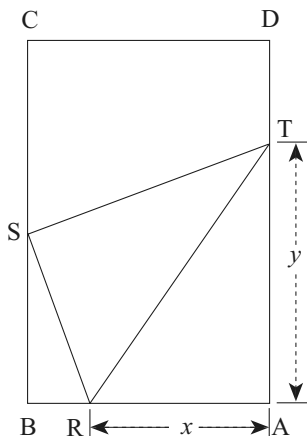
DEUXIÈME SUJET NATIONAL

ÉNONCÉ

Soit $ABCD$ une feuille rectangulaire de largeur $AB = 4$ et de longueur $BC = 6$. Soit R un point de $[AB]$ (bord inférieur de la feuille) et T un point de $[AD]$ (bord droit de la feuille). On replie la feuille suivant le segment $[RT]$ et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir la figure ci-contre.

Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment $[BC]$ (bord gauche de la feuille).

On pose $AR = x$ et $AT = y$.



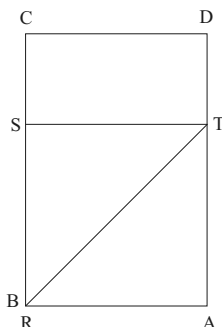
1°) Trouver les valeurs minimale et maximale de x .

2°) Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur $[BC]$.

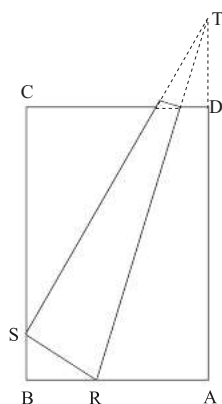
3°) Trouver la valeur de x pour laquelle la partie repliée (triangle SRT) est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST ?

SOLUTION (nationale)

1°) La valeur maximale de x est atteinte lorsque R est en B (cas de la figure ci-dessous).



Alors $x = AB = 4$.



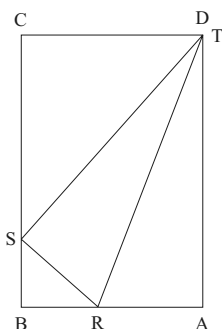
Le point A, après repliement de la feuille, ne peut venir en un point S de [BC] que si $RA \geq RB$, c'est-à-dire $x \geq \frac{a}{2}$. ($a = 4$).

Mais pour les plus petites valeurs de x supérieures à $\frac{a}{2}$, le point T, intersection de la droite portant le pli et de la droite (AD) sera en dehors du segment [AD] (cas de la figure ci-contre), la partie repliée étant alors un trapèze.

La plus petite valeur de x respectant les conditions du problème sera donc obtenue lorsque T sera en D (cas de la figure ci-contre).

Alors $DS = DA = 6$.

Comme $CD = 4$, $CS = \sqrt{20}$ d'après Pythagore.

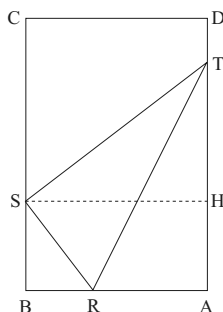


Donc $BS = 6 - \sqrt{20}$. Or $BR = 4 - x$
d'où $RS^2 = AR^2 = x^2 = (6 - \sqrt{20})^2 + (4 - x)^2$ d'après Pythagore,
soit $(6 - \sqrt{20})^2 + 16 - 8x = 0$ ou encore $8x = 72 - 12\sqrt{20}$ et enfin
 $x = 9 - \frac{3}{2}\sqrt{20}$.

En conclusion, $x \in I$ où $I = \left[9 - \frac{3}{2}\sqrt{20} ; 4 \right]$

2°) Soit H le projeté orthogonal de S sur (AD).

$RS = AR = x$, $BR = 4 - x$



Donc, $BS = \sqrt{x^4 - (4-x)^2} = \sqrt{8x-16}$ d'après Pythagore, et $AH = BS$.

D'où $HT = y - \sqrt{8x-16}$. Or $SH = 4$ et $TS = TA = y$.

Alors, d'après Pythagore dans le triangle SHT rectangle en H :
 $y^2 = 16 + (xy - \sqrt{8x-16})^2$ soit, après développement, réduction et simplification par 2, $4x = y\sqrt{8x-16}$ ou $y = \frac{4x}{\sqrt{8x-16}} = \frac{2x}{\sqrt{2x-4}}$.

3°) Soit $S(x)$ l'aire de la partie repliée.

$$S(x) = \frac{1}{2}AR \times AT = \frac{1}{2}xy$$

Donc, d'après la relation précédemment établie, $S(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2x-4}}$.

$S(x)$ est une quantité positive qui varie dans le même sens que son carré.

Posons $C(x) = [S(x)]^2 = \frac{x^4}{2x-4}$.

C est une fonction dérivable sur I et pour tout x de I ,

$$C'(x) = \frac{6x^4 - 16x^3}{(2x-4)^2} = \frac{2x^3(3x-8)}{(2x-4)^2}$$

qui a sur I le même signe que $3x-8$.

$C'(x)$ est donc négative si $x < \frac{8}{3}$, nulle pour $x = \frac{8}{3}$ et positive pour $x > \frac{8}{3}$.

C (ainsi que S) est décroissante sur $\left[9 - \frac{3}{2}\sqrt{20}; \frac{8}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{8}{3}; 4\right]$.

S admet donc un minimum en $\frac{8}{3}$, minimum égal à $S\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{32\sqrt{3}}{9}$.

Le triangle AST est équilatéral car

$$AS^2 = AB^2 + BS^2 = 16(8x-16) = 8x = \frac{64}{3} = y^2.$$

Remarque Le programme de 1^{ère} S permet aussi de dériver directement

$$S(x) : S'(x) = \frac{2x\sqrt{2x-4} - x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-4}} \times 2}{2x-4}$$

$$= \frac{2x(2x-4) - x^2}{(2x-4)^{3/2}} = \frac{x(3x-8)}{(2x-4)^{3/2}}$$

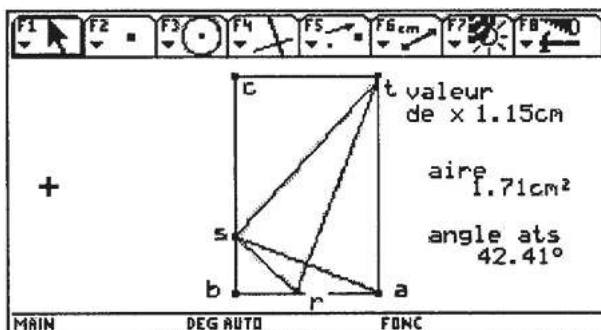
SOLUTION 2 proposée par Jean- Alain Roddier²

Approche Cabri

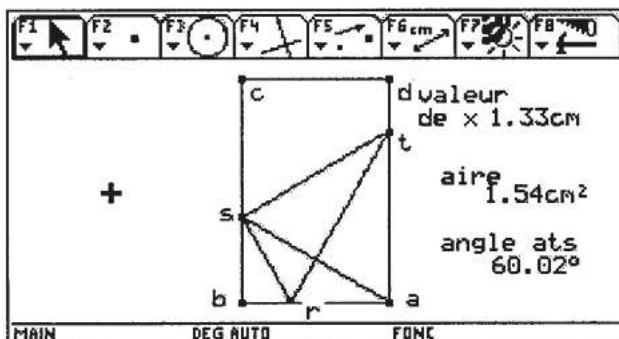
On construit le rectangle ABCD à l'échelle 1/2. En remarquant que (RT) est la médiatrice de [SA], il suffit de prendre S sur [BC]. La médiatrice de [SA] permet d'obtenir les points R et T.

On demande d'afficher la longueur $x = AR$, l'aire de ART et la valeur de l'angle ATS.

En déplaçant S sur [BC], on s'aperçoit que la plus grande valeur de x est obtenue quand R est en B et la plus petite quand T est en D (figure suivante)



En faisant varier AR de sa valeur minimale à sa valeur maximale, on s'aperçoit que l'aire commence par décroître pour croître par la suite. L'aire minimale semble être atteinte quand le triangle AST est équilatéral (figure suivante)



²Lycée de Haute-Auvergne à St Flour

Démonstration

1 - La valeur maximale de x est obtenue quand R est en B et elle vaut 4.

Recherche de la valeur minimale de x

Plaçons notre figure dans un repère orthonormé d'origine B et tel que les coordonnées de A et C soient (0 ; 4) et (0 ; 6). Le point S aura pour coordonnées (0 ; a).

Un point M(X, Y) appartient à la médiatrice Δ de [AS] si et seulement si $MA^2 = MS^2$, ce qui équivaut à $(X - 4)^2 + Y^2 = X^2 + (Y - a)^2$.

Après simplification, on en déduit une équation de Δ :

$$2aY = 8X + a^2 - 16 \quad (1)$$

Pour la valeur minimale de x , Δ passe par D, on remplace X et Y par 4 et 6, ce qui donne l'équation : $12a - 32 + a^2 - 16 = 0$ Cette équation a deux solutions : $6 - \sqrt{5}$ et $6 + 2\sqrt{5}$. Seule la première convient au problème.

En utilisant le triangle rectangle BSR et les données de l'énoncé, on a : $a^2 = x^2 - (4 - x)^2$.

Après simplification, on a : $a^2 = 8x - 16$ (2).

En remplaçant a par $6 - 2\sqrt{5}$, on obtient $x = 9 - 3\sqrt{5} \approx 2,29$.

2- La droite Δ passe par le point T de coordonnées (4; y). En utilisant l'équation (1), on obtient la relation : $2ay = 32 + a^2 - 16$.

La relation (2) permet de remplacer a dans la relation précédente et on

$$\text{obtient } y = \frac{2x}{\sqrt{2x-4}} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}$$

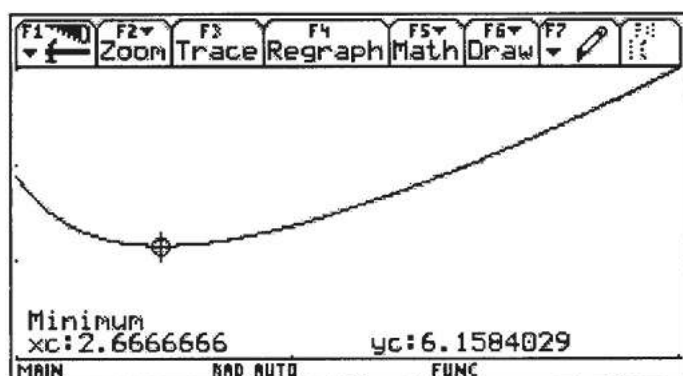
3- L'aire du triangle RAT vaut $\frac{xy}{2}$

La fonction notée f qui associe à x l'aire de RAT est définie par :

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{2} x^2}{2\sqrt{x-2}}.$$

Conjecture

Nous allons, dans un premier temps, tracer la représentation graphique de la fonction dans la fenêtre $[2, 29, 4] \times [5, 8, 5]$ Nous lançons ensuite la recherche d'une valeur approchée du minimum. La calculatrice nous fournit alors l'écran ci-dessous :



La conjecture que nous pouvons alors produire est la suivante : « la fonction f admet un minimum en $8/3$ »

Factorisation

Il nous faut à présent tester cette conjecture pour pouvoir soit la confirmer, soit la rejeter. Pour cela, nous devons comparer $f(x)$ et $f(8/3)$. L'expression de $f(x)$ contenant une racine carrée, nous choisissons de comparer $(f(x))^2$ et $(f(8/3))^2$, pour cela, lançons le calcul de la différence : $(f(x))^2 - (f(8/3))^2$

Done

$$\frac{\sqrt{2} \cdot x^2}{2 \cdot \sqrt{x-2}} \rightarrow f(x)$$

$$\text{factor}((f(x))^2 - (f(8/3))^2)$$

$$\frac{(3 \cdot x - 8)^2 \cdot (3 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 64)}{54 \cdot (x - 2)}$$
 MAIN RAD AUTO FUNC 2/30

Remarque : La réponse fournie par la calculatrice montre qu'elle n'a pas fait que factoriser l'expression et qu'elle a réduit au préalable l'expression au même dénominateur.

Etude du signe

Il nous suffit à présent d'étudier le signe de l'expression sur l'ensemble de départ de la fonction. L'expression $3x^2 + 16x + 64$ ayant été laissée telle quelle, cela signifie qu'elle n'a pas de racines réelles et donc qu'elle garde

le signe du coefficient de x^2 . Nous pouvons donc, malgré la complexité de l'expression, affirmer qu'elle est toujours positive sur l'ensemble de départ de f et qu'elle ne s'annule qu'une seule fois. Ainsi, nous pouvons affirmer que : « **la fonction f admet un minimum en $8/3$ et ce minimum est atteint une seule fois** ».

4. Pour prouver que le triangle AST est équilatéral dans le cas où l'aire de RAT est minimale, il suffit de montrer que l'angle $\widehat{RTA}$ mesure 30° .

$$\tan(\widehat{RTA}) = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2x-4}}{2}.$$

En remplaçant x par $\frac{8}{3}$, on obtient $\tan(\widehat{RTA}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ donc $\widehat{RTA} = 30^\circ$.
Le triangle AST est équilatéral.

Commentaires

Les questions d'optimisation constituent bien souvent de bons exemples d'utilisation des variations d'une fonction. C'est certainement le cas de l'exercice ci-dessus, où l'on attend de façon traditionnelle le calcul de la dérivée suivie de l'étude de son signe.

L'expression de la dérivée est relativement longue à trouver, et l'on peut se demander si cette méthode de recours systématique à la dérivée est propice à un véritable raisonnement ou s'il n'émane pas plus souvent d'une pratique bien automatisée. Le recours au calcul formel pour réaliser des factorisations dans ce genre de problème est une pratique que nous n'avons pas suffisamment intégrée dans nos cours et elle perd ainsi une certaine légitimité institutionnelle ; pourtant la méthode que nous avons développée ici montre - avec force - l'intérêt d'utiliser le calcul formel.

La méthode que nous venons d'exposer de factorisation de l'expression $f(x) - f(x_0)$ fonctionne parce que deux conditions sont réunies :

- d'une part, la fonction est du type $\sqrt{u}$ où u est une fonction rationnelle, et, *via* un passage au carré, nous obtenons une fonction rationnelle. Ce type de fonction est tout à fait propice au calcul algébrique ;
- d'autre part, la valeur x_0 en laquelle le minimum est atteint est une valeur explicite et facilement identifiable. Ce n'est pas toujours le cas et c'est la raison essentielle pour laquelle cette méthode ne peut pas toujours être appliquée.

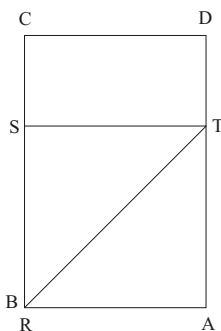
Remarque : la conjecture « $x = \frac{8}{3}$ » pouvait être obtenue à partir de la conjecture « AST équilatéral », c'est-à-dire que $\widehat{\text{RAT}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Il suffisait de résoudre l'équation $\frac{\sqrt{2x-4}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

SOLUTION 3 (de Toulouse)

1) Trouver les valeurs minimales de x .

Commençons par une remarque d'ordre général : dans ce type de problème, il est préférable de mener les calculs en posant $AB = \ell$ et $AD = L$, plutôt que d'utiliser tout de suite des valeurs numériques fournies par l'énoncé. Cela permettra de s'assurer de l'homogénéité des grandeurs calculées. Le fin du fin est même de poser $AB = 2\ell$ et $AD = 3\ell$ puisque le problème est invariant par homothétie...

D'après les conditions même de l'exercice, x est *majoré* par 2ℓ ; mais un majorant n'est pas nécessairement un *maximum*. Il s'agit de montrer que la figure est possible pour $x = 2\ell$. C'est effectivement le cas. La figure ci-dessous se passe de commentaire.



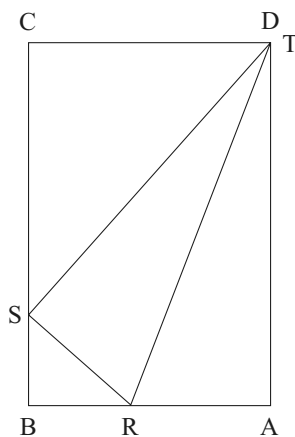
De même la valeur 0 est un minorant pour x , mais n'est pas en évidence un minimum. On peut deviner que le minimum sera obtenu lorsque T est en D; ceci peut se *démontrer*.

Mettons en évidence une première condition nécessaire; on a $RA = RS$ par symétrie par rapport à la droite (RT), et aussi $RS \geq RB$ puisque B est le projeté orthogonal de R sur (BC). On en déduit que, nécessairement, $RA \geq RB$, autrement dit $x \geq \ell$.

Cette condition n'est pas suffisante car, pour $x = \ell$, S sera en B et le point T n'existe pas... Et si x est à peine plus grand que ℓ , le point T ne sera pas sur [AD].

On est ainsi convaincu que la valeur minimale possible pour x est celle correspondant au cas où T est en D. L'emploi systématique du théorème de Pythagore dans les nombreux triangles rectangles de la figure permet de calculer la valeur de x correspondante. On trouve

$$x = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} \ell$$



2) Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur [BC].

On peut procéder de nombreuses façons, par exemple, toujours en utilisant systématiquement la relation de Pythagore. On peut aussi utiliser la similitude des triangles rectangles ou, ce qui revient au même, utiliser les lignes trigonométriques de leurs angles.

En appelant $\beta = \widehat{RAS}$, on a :

- en projetant [ST] sur [AB], $y \sin(2\beta) = 2\ell$;
- en projetant [SR] sur [BR], $x \cos(2\beta) = 2\ell - x$;
- et en projetant S et B sur [AT], $y \cos(2\beta) + x \sin(2\beta) = y$.

On en déduit : $y \frac{2\ell - x}{x} + x \frac{2\ell}{y} = y$ d'où $y = \frac{x\sqrt{\ell}}{\sqrt{x - \ell}}$. Ainsi...

3) Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale. Quelle est la nature du triangle AST ?

Le problème est donc de rechercher le minimum (s'il existe) de la fonction $S(x) = \frac{x^2\sqrt{\ell}}{\sqrt{x - \ell}}$ lorsque $x \in \left[\frac{9 - 3\sqrt{5}\ell}{2}, 2\ell \right]$. On pourrait utiliser

la dérivation pour étudier les variations de S . Il est d'ailleurs habile, au lieu de dériver directement S , d'observer que, $S(x)$ étant strictement positif, $S(x)$ varie dans le même sens que $S(x)^2$, qui lui-même varie en sens contraire de son inverse $C'(x) = \frac{1}{S(x)^2} = \ell^2 \frac{x - \ell}{x^4}$ et si on a la bonne

idée de changer de variable en posant $X = \frac{\ell}{x}$, on est amené à étudier

les variations sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{9-3\sqrt{5}}\right]$ de $D(X) = \frac{1}{\ell}(X^3 - X^4)$, ce qui est aisé.

Il est intéressant de savoir qu'on peut aussi conclure sans dérivation, de la façon suivante : on utilise une inégalité célèbre connue sous le nom d'inégalité de Cauchy ; soient a et b deux nombres positifs, l'identité $(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$ montre que $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ avec égalité si et seulement si $a=b$. Puis, si a, b, c, d sont quatre réels positifs, on a : $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd$ avec égalité si et seulement si $a=b=c=d$.

Il suffit alors d'écrire³ $D(X) = \frac{1}{3\ell}XXX(3-3X)$ pour voir qu'en utilisant l'inégalité de Cauchy, on a :

$$D(X) \leq \frac{1}{3 \times 4^4 \ell} (X + X + X + (3-3X))^4$$

avec égalité si et seulement si $X = X = X = 3-3X$, soit $X = \frac{3}{4}$, ce qui donne un maximum pour $D(X)$. On en déduit que $S(x)$ est minimum pour $x = \frac{4}{3}\ell$ avec $S\left(\frac{4}{3}\ell\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9}\ell^2$. Un calcul simple donne alors $y = \frac{4\ell}{\sqrt{3}}$, puis $\sin(2\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $2\beta = \frac{\pi}{3}$ et le triangle AST est équilatéral.

Commentaire

L'énoncé de cet exercice était très fermé et orientait de façon autoritaire vers un paramétrage de la figure par la longueur $x = AR$. Or ce n'est pas le seul paramétrage possible ; on peut aussi, par exemple, prendre l'angle $\alpha = \widehat{ART}$; on introduit alors le point I, intersection de (AS) et de (RT) et on a simplement : $AI = \frac{2}{\sin(\alpha)}$, puis $AR = \frac{AI}{\sin(\alpha)} = \frac{2}{\sin^2(\alpha)}$, puis $AT = \frac{2}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$ et enfin le double de l'aire de ART vaut $\frac{4}{\sin^3(\alpha)\cos(\alpha)}$ qui est minimal lorsque $\sin^3(\alpha)\cos(\alpha)$ est maximal. Les variations de cette fonction de α s'étudient facilement par dérivation, très facilement même

³le lecteur prendra le temps de réfléchir au pourquoi de cette réécriture !

NDLR Un produit de plusieurs facteurs dont la somme est constante est maximum quand ces facteurs sont égaux (ou, faute de le pouvoir, s'approchent le plus possible de l'égalité)

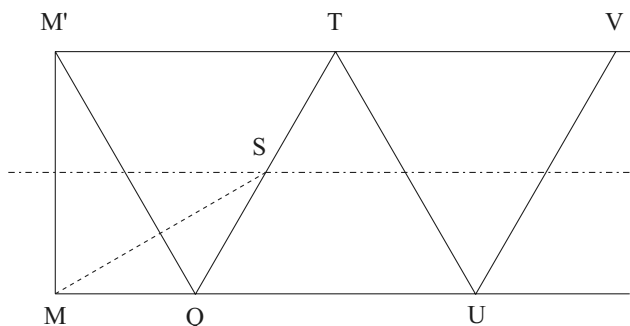
en observant que $\sin^3(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{4} \sin(2\alpha) - \frac{1}{8} \sin(4\alpha)$ via un soupçon de trigonométrie.

SOLUTION 3', de F. Lo Jacomo

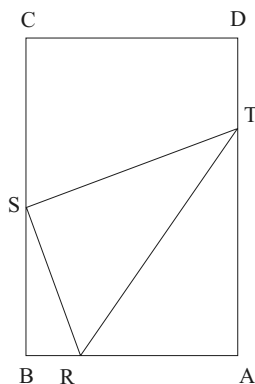
F. Lo Jacomo ne s'en laisse pas compter par la directivité ci-dessus signalée dans les commentaires de Toulouse et, d'emblée opte pour l'étude trigonométrique en posant $\widehat{AST} = \alpha$, ce qui est le même choix puisque, ARST étant inscriptible, $\widehat{AST} = \widehat{ART}$.

SOLUTION 4, de Versailles

Cet exercice, que certains professeurs nous ont signalé soumettre régulièrement à leurs élèves, fait penser à la « construction » du tétraèdre régulier (ou, plus simplement, de l'angle de 60°) avec la bande de papier et son axe médian :



Le problème peut être abordé par des considérations de géométrie « pure » ou par des considérations d'aires. Nous proposons une solution « analytique » qui montrera que, si les paramètres sont parfois indésirables, ils sont souvent indispensables. On se place donc dans le repère orthonormal d'origine B dont les axes sont portés par (AB) et (BC), et on prend m pour ordonnée de S. La médiatrice de [AS] a pour équation : $8X - 2mY + m^2 - 16 = 0$.



Les coordonnées des points d'intersection R et T de cette droite avec les côtés du rectangle s'en déduisent et on a $x = \frac{m^2 + 16}{8}$ et $y = \frac{m^2 + 16}{2m}$,

fournissant la condition : $6 - 2\sqrt{5} \leq m \leq 4$, la relation $4x = my$ et se traduisant par l'encadrement : $9 - 3\sqrt{5} \leq x \leq 4$. L'aire considérée est minimale lorsque xy l'est, ce qui donne $m = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Le triangle isocèle ATS a un demi-angle au sommet de mesure 30 degrés. Il est équilatéral.

COMMENTAIRES

Il a parfois été déploré ci-dessus la directivité de l'énoncé (Toulouse ; implicitement F. Lo Jacomo et Versailles), son manque d'originalité (pour une épreuve nationale).

Nantes enfonce le clou : « l'équipe n'a pas trouvé le choix très judicieux et ce, pour deux raisons :

Exercice donné dans des ouvrages anciens ou encore en usage !!

- Fractale 1^{ère}S (Bordas) (programme 2001), page 92

- ou Primordial 1^{ère}S et Term S (Vuibert). Problème 6 page 139.

La « seconde raison » de Nantes tient à l'usage de la dérivation « qui n'a peut-être pas été encore vue à cette époque de l'année ».

CELA DIT :

• de Lyon

- La valeur minimum de x a été très rarement trouvée, et quand elle l'a été, cela a été parfois en répondant d'abord à la question 2.

- Pour la question 2, certains candidats n'ont pas eu de chance : ils ont exprimé correctement x en fonction de y : cela répondait, bien sûr, à la question, mais compliquait beaucoup la question n° 3 (nécessité de vérifier $\sqrt{y^2 - 16}$

- certains candidats ont reconnu de manière très pertinente des triangles « de même forme » dans la figure, ce qui pouvait faciliter la question n° 2.

• de Caen

- l'exercice 2 (exercice national de la feuille pliée) a été très décevant, la valeur minimale x n'a jamais été trouvée ; les candidats avaient pourtant à portée de la main le matériel nécessaire pour expérimenter. L'expression de l'aire de la partie pliée en fonction de x a été très rarement établie.

Michel Regnault précise :

Un pliage, assez classique, conduisant à l'étude des variations d'une aire pour en déterminer le minimum et préciser la configuration correspon-

dante. Le texte définit et impose les deux variables x et y , *a priori* indépendantes, mais la contrainte pour S d'être sur le segment $[BC]$ établit une liaison entre elles et permet d'exprimer l'aire étudiée en fonction de la seule variable x .

La première question semble anodine, mais le nombre d'erreurs commises montre qu'elle ne l'est pas. En effet, la plupart des candidats se contentent de regarder les bords $[AB]$ et $[BC]$ du rectangle sans se préoccuper du point T , d'où la double condition nécessaire mais non suffisante : $0 \leq 4 - x \leq x$.

Trouver une relation entre x et y ne paraît pas insurmontable dans une figure particulièrement riche en triangles rectangles ; une double application du théorème de Pythagore suffit, mais, là encore, peu de réponses correctes !

L'expression de y en fonction de x qui en découle facilement, semble définie pour tout x supérieur à 2, - ce qui ne peut qu'endormir davantage l'attention de ceux qui se sont trompés dans 1^o -, mais c'est oublier la condition $y \leq 6$, qui s'écrit $x \leq 3\sqrt{2x-4}$, et dont la résolution fournit, entre autres, $x \geq 9 - 3\sqrt{5}$.

La troisième question est surtout technique et assez embarrassante pour quelques rescapés, encore peu experts en calculs de dérivées.

• d'Amiens

peu de candidats traitent une relation entre x et y et ceux qui y parviennent ont des difficultés à cause d'un radical, comme dans l'exercice précédent.

• de Montpellier

L'énoncé est plus « classique », ce qui explique un nombre plus ou moins important de réponses plus ou moins correctes. Certaines copies (même bonnes) ont laissé le minimum à 2 pour x . Une copie a entièrement traité le problème avec une procédure machine (calcul formel) sans donner toutefois de réponses vraiment satisfaisantes.

COMPLÉMENTS

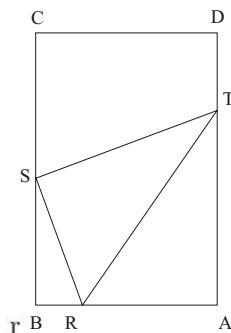
(Ils sont dûs à Dominique Roux et *passionnants* !)

Question 1

1- Observons d'abord que l'auteur du sujet, en donnant les valeurs $AB = 4$ et $BC = 6$ n'a pas choisi des valeurs particulières : connaissant AB , le choix de BC ne doit vérifier qu'une condition :

$BC > \frac{2}{\sqrt{3}}AB$, car lorsque le minimum est réalisé, on a :

$$AT = RA \times \tan \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}AB \sqrt{3}.$$



2- [Dominique Roux reprend ici l'idée-clé de l'énoncé :

« L'énoncé guide vers une solution analytique qui consiste à introduire les variables $x = AR$, $y = AT$, qui sont, en posant $AB = 2\ell$, reliées par la relation $y \times BS = 2\ell x$, d'où $xy^2 = \ell(x^2 + y^2)$ et $y = \frac{x\sqrt{\ell}}{\sqrt{x - \ell}}$, que l'on sait dériver ».

Puis il précise la démarche trigonométrique signalée ci-avant dans les Commentaires de la « Solution 3 »]

Voici maintenant le plus intéressant :

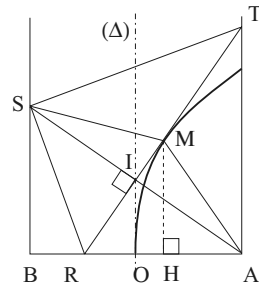
La simplicité du résultat final conduit à s'interroger : n'y aurait-il pas une preuve sans dérivation de fonction ? Voici une piste qui va utiliser quelques rappels concernant des propriétés élémentaires des coniques. Le point I, milieu de [AS] décrit la droite Δ homothétique de (BC) par Hom (A, 1/2, or

Propriété 1

Le lieu des projections du foyer A d'une parabole sur ses tangentes est sa tangente au sommet (Δ). Inversement, lorsque I décrit (Δ), la perpendiculaire en I à (AI) reste tangente à la parabole de foyer A et de tangente au sommet (Δ), donc de directrice (BC).

Le problème étudié revient donc au suivant :

M parcourant un arc de parabole, déterminer M tel que l'aire du triangle ART limitée par la tangente en M, l'axe (AB) de la parabole et la parallèle (AD) à la directrice passant par le foyer A soit minimale. Montrons que M doit être le milieu du segment [RT].



Variante 1 (mécanique)

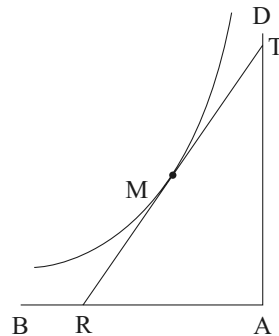
Imaginons une lame d'eau savonneuse limitée par les droites fixes (AB) et (AD) et la droite mobile (RT) (supposée de poids nul) qui s'appuie sur la parabole. Cette droite se place de telle façon que l'aire de ART soit minimale, mais aussi de façon que le moment résultant autour du point de pivotement M des forces de tension superficielle qui s'appliquent sur les bras [MR] et [MT] soit nul. Comme ces forces sont constantes tout le long de [RT], ceci n'a lieu que si $MR = MT$.

variante 2(hyperbolique)

propriété 2

La tangente en M à toute hyperbole d'asymptotes (AB) et (AD) coupe ces droites en deux points R et T dont le milieu est M. De plus, lorsque M se déplace sur l'hyperbole, l'aire du triangle ART est constante.

Inversement, si R et T se déplacent sur les axes (AB) et (AT) de façon que l'aire du triangle soit une constante k , la droite (RT) reste tangente à une hyperbole d'asymptote (AB) et (AD), le point de contact étant M, milieu de [RT].



En faisant varier k , on obtient une famille d'hyperboles. Le problème que nous étudions est résolu en choisissant k tel que l'hyperbole correspondante soit tangente (en M) à la parabole ci-dessus. M est donc bien le

milieu du segment $[RT]$

Exploitions maintenant ce renseignement concernant M , pour cela, utilisons la

propriété 3

Pour tout point M de la parabole de foyer A , de directrice (BC) , on a $MA = MK$ où K est la projection de M sur (BC) . De plus, la tangente en M est la médiatrice de $[AK]$, elle coupe l'axe (AB) en R tel que $ARKM$ soit un losange (car I est milieu commun de $[AK]$ et $[MR]$, donc K coïncide avec S).

Conclusion

Dans le triangle rectangle ART , M est milieu de l'hypoténuse donc $MA = MR$. Or, $MA = MK = AR$. Donc le triangle ARM est équilatéral. Donc tous les angles en R valent $\frac{\pi}{3}$ et par suite AST est équilatéral.

Remarque : en projetant M sur (AB) , on obtient un point H et les points R et H divisent le segment $[AB]$ en trois segments égaux. Le lecteur pourra aussi observer que la figure contient 7 demi-triangles équilatéraux isométriques à BRS .