Académie de Nantes **Session 2011**

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SUJET DESTINÉ AUX CANDIDATS DES SÉRIES SCIENTIFIQUES

Une annexe est à rendre avec la copie.

L'épreuve est d'une durée de 4 heures.

Les calculatrices, ainsi que tous les instruments de géométrie et les crayons de couleur sont autorisés.

L'utilisation de tout autre document est interdite.

Lors de l'examen de la copie, toute ébauche de démarche sera valorisée, même s'il s'agit d'une démarche ne pouvant aboutir.

Exercice 1 *(exercice national)*

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

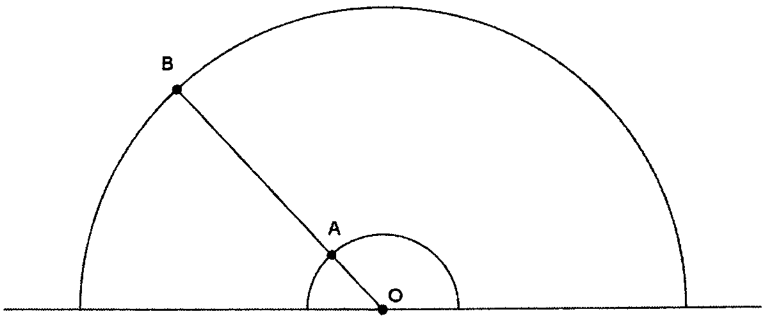


Fig. 1

Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

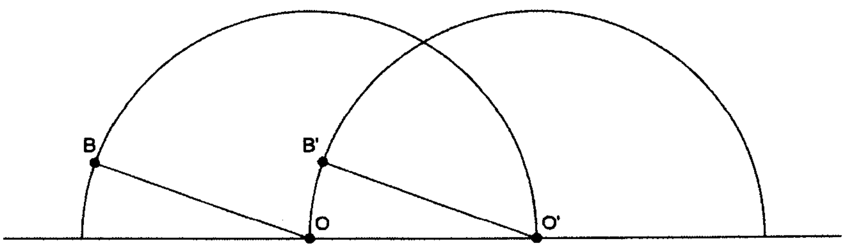


Fig. 2

Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, $CB = 4\ CA$ et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose $CA = a$.

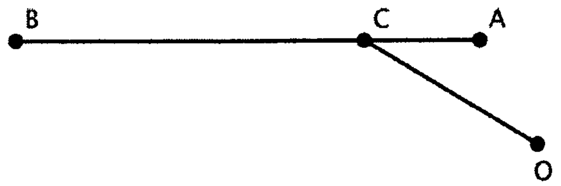


Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.
b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

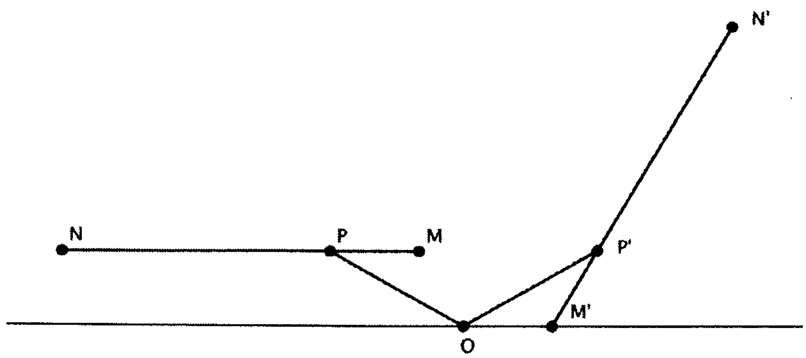


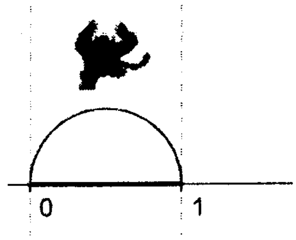
Fig. 4

Exercice 2 *(exercice national)*

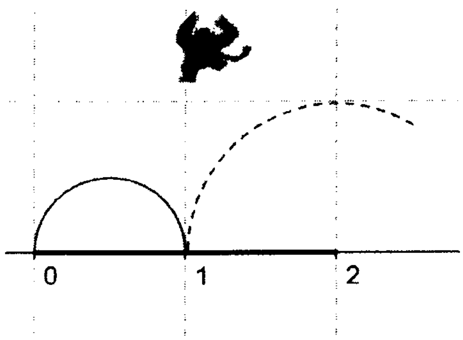
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en **exactement** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, n (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment $[0 ; n]$.

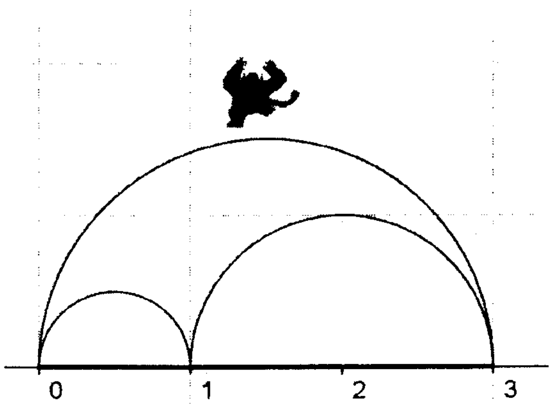
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0 ; 2]$.



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0 ; 3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.

2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier m, on a : $1+2+3+....+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5.
   a. Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.
   b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose $N \geq 6$ et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 …
   Montrer que N+4 est aussi atteignable.

Exercice 3 *(exercice académique)*

Dans tout l'exercice, N désigne un entier naturel et n un entier naturel non nul, N^2 est le carré de N.

On suppose que l'écriture du nombre N contient au moins n chiffres, distincts ou non.

On appelle alors **terminaison à *n* chiffres** du nombre N le nombre formé par les n derniers chiffres de N. Par exemple, 52 est la terminaison à 2 chiffres de 35 752.

L'objectif de l'exercice est d'étudier quelques cas où les nombres N et N^2 ont la même terminaison.

1) Quels sont les nombres entiers naturels égaux à leur propre carré ?

2) *Terminaison à un chiffre.*

On suppose dans cette question que N et N^2 ont la même terminaison à un chiffre. Quelles sont les valeurs possibles pour ce chiffre ?

3) *Terminaison à deux chiffres* (on suppose que N s'écrit avec au moins deux chiffres).

a) Montrer que si deux nombres admettent tous les deux 25 comme terminaison à deux chiffres, alors leur produit admet également 25 pour terminaison à deux chiffres.

b) On suppose dans cette question que N et N^2 ont la même terminaison à deux chiffres. Trouver toutes les valeurs possibles pour cette terminaison.

4) *Terminaison à trois chiffres* (on suppose que N s'écrit avec au moins trois chiffres).

a) k désigne un entier naturel inférieur ou égal à 9.
Déterminer k de sorte que les nombres $100k + 25$ et $(100k + 25)^2$ aient la même terminaison à trois chiffres.

b) Donner un exemple d'un nombre N à quatre chiffres tel que N et N^2 aient la même terminaison à trois chiffres.

c) On suppose que N et N^2 ont la même terminaison à trois chiffres. Trouver toutes les terminaisons à trois chiffres possibles pour N.

5) *Un cas où n est supérieur 3.*

On suppose que N s'écrit avec au moins cinq chiffres. Trouver une terminaison à cinq chiffres de N, autre que 00000 et 00001, telle que N et N^2 aient la même terminaison à cinq chiffres.

6) *Pour aller plus loin : la terminaison à trois chiffres de N^3.*

On suppose que N s'écrit avec au moins trois chiffres. Trouver toutes les terminaisons à trois chiffres telles que le nombre N et son cube N^3 aient la même terminaison à trois chiffres.

Exercice 4 *(exercice académique)*

Dans tout l'exercice, ABC est un triangle équilatéral dont le cercle circonscrit Γ_1 de centre O est de rayon 1.
On appelle corde de Γ_1 tout segment dont les extrémités sont deux points de Γ_1.
Le but de l'exercice est de comparer différentes façons de calculer, lorsqu'on trace au hasard une corde de Γ_1, la probabilité que sa longueur soit supérieure ou égale à BC.

1. Déterminer la longueur BC.

2. Longueur d'une corde.

a. Montrer que pour tout point M, distinct de O, situé à l'intérieur du cercle Γ_1, il existe une unique corde de Γ_1 ayant M pour milieu.

b. Soit Γ_2 le cercle inscrit dans le triangle ABC.

M_1, M_2 et M_3 sont trois points à l'intérieur de Γ_1 tels que : M_1 est un point situé sur Γ_2, M_2 et M_3 sont respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de Γ_2.

Sur la figure donnée en annexe, construire les cordes de Γ_1 ayant pour milieux respectifs M_1, M_2 et M_3.

Comparer la longueur de chacune de ces trois cordes avec la longueur BC.

c. On choisit au hasard un point M distinct de O et à l'intérieur du cercle Γ_1. Quelle est la probabilité que la corde de milieu M ait une longueur supérieure ou égale à la longueur BC ?

3. Cordes et un premier algorithme.

Soit D le symétrique de A par rapport au centre O de Γ_1.

On considère l'algorithme (1) ci-dessous :

```
Algorithme (1)
Initialisation
k=0 ; n=10
Traitement
  Pour i allant de 1 à n
  | Placer le point M_i tel que vec(AM_i) = (i/n) vec(AD)
  | Tracer la corde [N_i P_i] passant par M_i et
  | perpendiculaire à (AD).
  | Calculer la distance N_i P_i.
  | Si N_i P_i ≥ BC alors k prend pour valeur k + 1
  Fin Pour
Sortie
  Afficher k/n
```

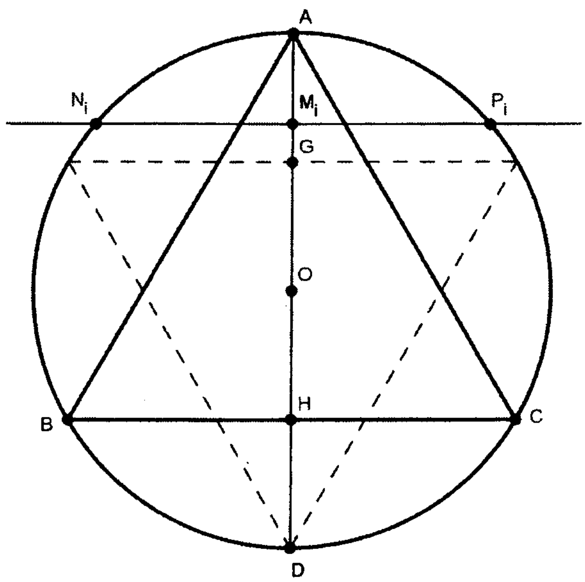


Figure 1

a. Quel nombre affichera cet algorithme ?

b. On modifie l'algorithme en remplaçant l'instruction « $n = 10$ » par : « $n = 100$ », puis par « $n = 1000$ », puis par « $n = 1\,000\,000$ ». Quel nombre affichera cet algorithme dans chacun de ces cas ?

c. On place au hasard un point M sur [AD] et on trace la corde de Γ_1 de milieu M et perpendiculaire à (AD).
Quelle est la probabilité p que cette corde soit de longueur supérieure ou égale à BC ?

4. Cordes et un second algorithme.

Dans cette question la droite (AT) est tangente au cercle Γ_1.
On considère l'algorithme (2) ci-dessous :

Algorithme (2).

Initialisation

$k = 0$

Traitement

Pour i allant de 1 à 99

  Placer le point M_i de Γ_1 tel que $\widehat{TAM_i} = \dfrac{i}{100} \times 180°$

  Calculer la distance AM_i

  Si $AM_i \geq BC$ alors k prend pour valeur $k + 1$

Fin Pour

Sortie

Afficher $\dfrac{k}{99}$

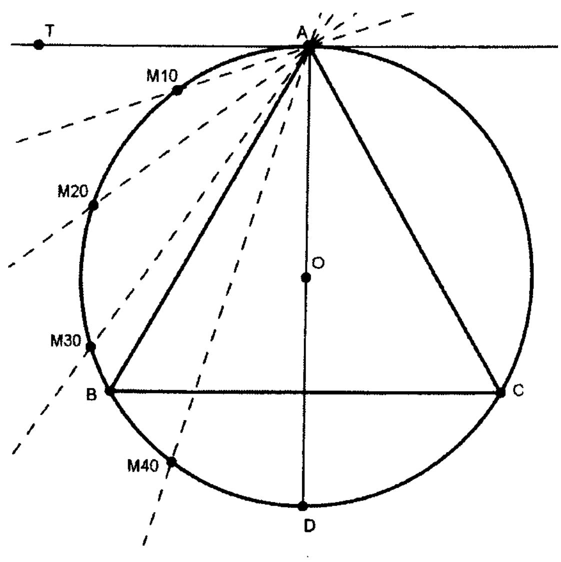


Figure 2

a. Quel nombre affichera cet algorithme ?

b. On choisit au hasard un point M sur le cercle Γ_1. Quelle est la probabilité que la longueur AM soit supérieure ou égale à BC ?

5. Conclusion:

Peut-on définir la probabilité de choisir, parmi toutes les cordes d'un cercle, une corde de longueur supérieure ou égale à celle du côté du triangle inscrit dans ce cercle ?

Annexe de l'exercice 4 - A réndre avec la copie.

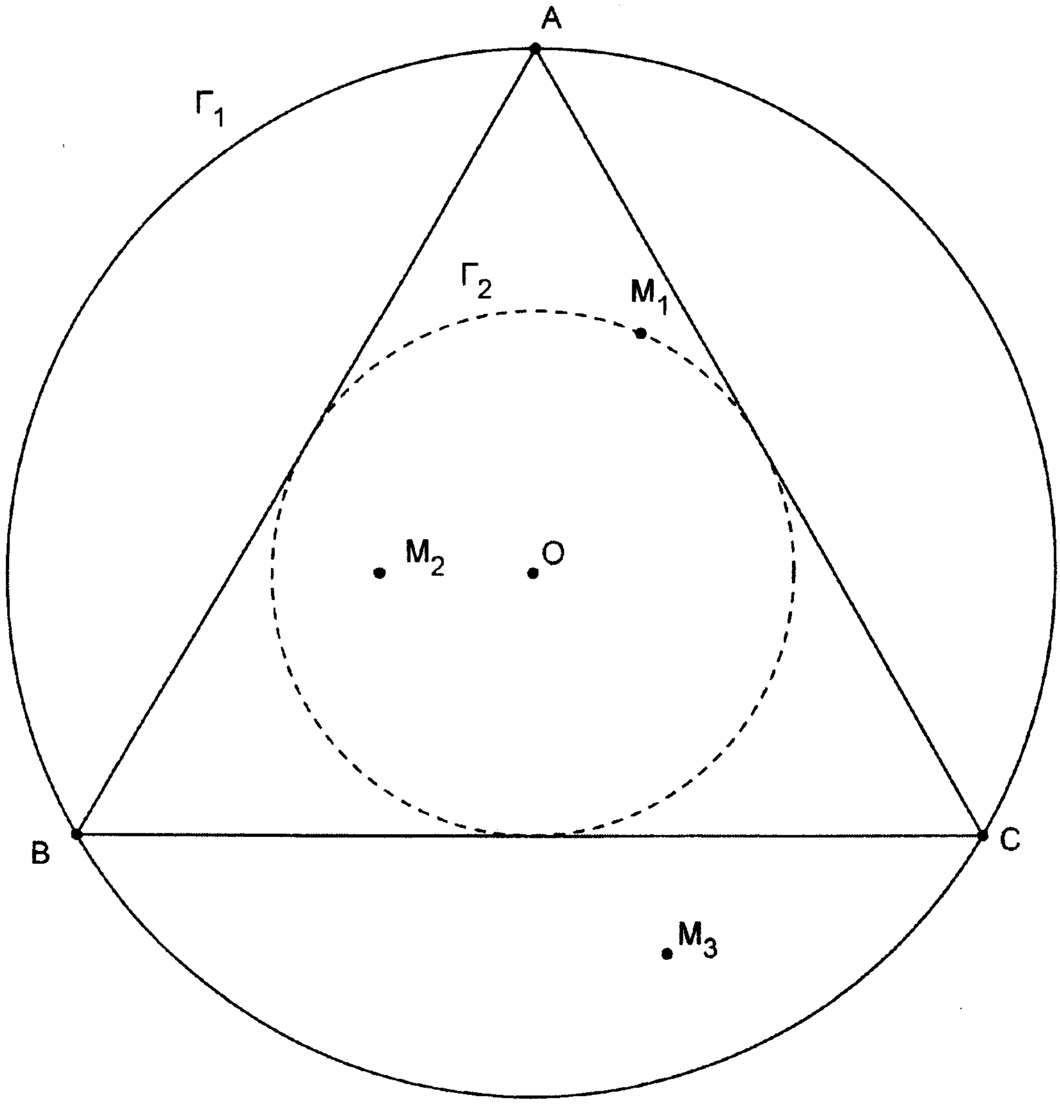


Figure 3