

**Nombres quadripartites, définition :**

Soit  $A$  un entier positif non nul.

Le nombre  $A$  est dit quadripartite s'il existe 4 entiers positifs  $a, b, c, d$  et un entier positif non nul  $m$  tels que

- d'une part, le nombre  $A$  est égal à la somme des entiers  $a, b, c, d$  ;
- d'autre part, les quatre nombres suivants sont égaux :  $a$  augmenté de  $m$ ,  $b$  diminué de  $m$ ,  $c$  multiplié par  $m$  et  $d$  divisé par  $m$ .

Le nombre  $m$  est appelé opérateur du nombre quadripartite  $A$ .

Les quatre nombres  $a, b, c$  et  $d$  sont appelés éléments du nombre quadripartite  $A$  associés à l'opérateur  $m$ .

**Exemple :**

Le nombre  $A = 8$  est un nombre quadripartite d'opérateur  $m = 1$  et d'éléments associés  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 2$  et  $d = 2$ .

En effet, on a :

- d'une part,  $8 = a + b + c + d$  ;
- d'autre part, les nombres  $a + 1$ ,  $b - 1$ ,  $c \times 1$ ,  $\frac{d}{1}$  sont égaux.

**Début du problème :**

1. Vérifier que le nombre 500 est un nombre quadripartite d'opérateur  $m = 4$  et d'éléments  $a = 76$ ,  $b = 84$ ,  $c = 20$  et  $d = 320$ .
2. Vérifier que le nombre 288 est un nombre quadripartite d'opérateur 2 et d'opérateur 3.
3. a) Soit  $m$  et  $c$  deux entiers non nuls.  
On pose  $A = c(m + 1)^2$ . Montrer que  $A$  est un nombre quadripartite en déterminant les autres éléments  $a, b$  et  $d$  en fonction de  $A$  et  $m$ .  
b) Réciproquement, montrer que si  $A$  est un nombre quadripartite d'opérateur  $m$  alors  $\frac{A}{(m+1)^2}$  est un entier.
4. a) Soit  $A = 2 \times 19^2 \times 53^2$ . Montrer que  $A$  est quadripartite et déterminer tous les opérateurs possibles  $m$ .  
b) 2014 est-il un nombre quadripartite ?
5. Donner le plus petit nombre quadripartite à 5 chiffres, d'opérateur 13, ainsi que le plus grand nombre quadripartite à 5 chiffres, d'opérateur 13. Préciser les éléments  $a, b, c$  et  $d$  associés dans chacun des cas.
6. Démontrer que 18 126 est quadripartite et qu'il n'a qu'un seul opérateur. Donner alors les quatre éléments associés.

## EXERCICE 4 Série S ensembles bi-connexes

Un ensemble  $A$  d'entiers naturels distincts est dit bi-connexe lorsque pour tout élément  $x$  de  $A$ , au moins un des entiers  $x - 1$  ou  $x + 1$  appartient à  $A$ .

Ainsi l'ensemble  $A = \{2013 ; 2014\}$  est bi-connexe car  $2013 \in A$ , avec  $(2013 + 1) \in A$   
et  $2014 \in A$ , avec  $(2014 - 1) \in A$ .

Par contre  $B = \{2 ; 3 ; 6 ; 8 ; 9\}$  n'est pas bi-connexe car 6 est « isolé » dans  $B$ , c'est-à-dire  $(6 + 1) \notin B$  et  $(6 - 1) \notin B$ .

Pour traiter l'une des questions suivantes, on pourra utiliser la propriété :  
pour tout entier  $n$  non nul, la somme des  $n$  premiers entiers est :

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Avec quel entier peut-on compléter l'ensemble  $B$  pour le rendre bi-connexe ?
2. Parmi les ensembles bi-connexes contenant tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 13, quel est celui qui a le moins d'éléments ?
3. On retire au hasard un élément de l'ensemble  $\{1 ; 2 ; \dots ; 10\}$  formé des entiers de 1 à 10. Quelle est la probabilité que l'ensemble obtenu reste bi-connexe ?
4. Combien peut-on former de sous-ensembles bi-connexes à 3 éléments dans  $\{1 ; 2 ; \dots ; 2014\}$  ?
5. a. Dresser la liste de tous les sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans  $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ .  
b. Combien peut-on former de sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans  $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$  où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 4 ?  
c. Déterminer la plus petite valeur de  $n$  telle que le nombre de tels sous-ensembles dépasse 2014.
6. On note  $u_n$  le nombre de sous-ensembles bi-connexes de  $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$  où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2.  
On a donc  $u_2 = 1$  car seul  $\{1 ; 2\}$  est bi-connexe.  
De même  $u_3 = 3$  car seuls  $\{1 ; 2\}$ ,  $\{2 ; 3\}$  et  $\{1 ; 2 ; 3\}$  sont bi-connexes.  
a. Justifier que  $u_4 = 6$ .  
b. On admet que pour tout  $n > 4$ ,  $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + u_{n-3} + 1$  et on donne l'algorithme suivant :

|              |    |                                       |
|--------------|----|---------------------------------------|
| Traitement : | 1  | $a$ prend la valeur 1                 |
|              | 2  | $b$ prend la valeur 3                 |
|              | 3  | $c$ prend la valeur 6                 |
|              | 4  | Pour $k$ allant de 1 jusqu'à 10 faire |
|              | 5  | $u$ prend la valeur $2c - b + a + 1$  |
|              | 6  | $a$ prend la valeur $b$               |
|              | 7  | $b$ prend la valeur $c$               |
|              | 8  | $c$ prend la valeur $u$               |
|              | 9  | Fin Pour                              |
| Sortie :     | 10 | Afficher $u$                          |

On exécute l'algorithme. Quelle valeur s'affiche en sortie ? Que représente-t-elle ?

- c. Recopier en le modifiant l'algorithme précédent pour qu'il affiche en sortie le plus petit entier naturel  $n_0$  tel que  $u_{n_0} \geq 2014$ . Que vaut alors  $n_0$  ?